## Лабораторная работа по теме

## «Тема 1.5. Методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений»

### **1.5.1. Вопросы, подлежащие изучению**

1. Постановка задачи численного решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Задача Коши.
2. Методы Рунге-Кутты различных порядков, общие свойства.
3. Погрешности методов.
4. Выбор шага интегрирования.
5. Графическая иллюстрация методов Рунге-Кутты.

### **1.5.2. Задание**

1. **Выбрать индивидуальное задание** в табл. 1.5-1 для решения обыкновенных дифференциальных уравнений**:**

* дифференциальное уравнение ;



* интервал [a;b] , где ищется решение дифференциального уравнения;
* начальные условия x0, y0;
* шаг интегрирования h0**.**

1. **Найти аналитическое решение** заданного дифференциального уравнения, полагая его точным.



1. **Вычислить значения полученного решения** на отрезке [a;b] с шагомh0.



1. **Найти численное решение дифференциального уравнения методом Эйлера** - в точках отрезка [a;b] с шагом h0 с помощью «ручного счета».



1. **Вычислить значения погрешностей**для, , .



1. **Составить схему алгоритма, написать программу** интегрирования дифференциальных уравнений методом Рунге-Кутты 4-го порядка с автоматическим выбором шага и провести контрольное тестирование на примере, рассмотренном в п. 1.5.5.
2. **Получить решение**«расчетом на ПК» с шагом h0 и E =10-4.



1. **Вычислить значения погрешностей**,



1. **Графически проиллюстрировать решения**.



### **1.5.3. Варианты задания**

Таблица 1.5-1

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **№**  **вар** | **Уравнение** | **x0** | **y0** | **h0** | **a** | **b** |
| **1** | **y' = x y2** | **0** | **-2** | **0.4** | **0** | **4** |
| **2** | **y' = y2 (x2+ x + 1)** | **0** | **-2** | **0.2** | **0** | **2** |
| **3** | **y' = x3 y2** | **0** | **-2** | **0.2** | **0** | **2** |
| **4** | **y' = y / cos2(x)** | **0** | **1** | **0.1** | **0** | **1** |
| **5** | **y' = y cos(x)** | **0** | **1** | **0.5** | **0** | **5** |
| **6** | **y' = y2cos(x)** | **0** | **-1** | **0.4** | **0** | **4** |
| **7** | **y' = x2 y + y** | **0** | **1** | **0.2** | **0** | **2** |
| **8** | **y' = (x – 1)2 y2** | **0** | **-1** | **0.5** | **0** | **5** |
| **9** | **y' = x3 y** | **0** | **1** | **0.2** | **0** | **2** |
| **10** | **y' = y2 sin(x)** | **0** | **0.5** | **0.2** | **0** | **2** |
| **11** | **y' = y sin(x)** | **0** | **1** | **0.4** | **0** | **4** |
| **12** | **y' = x y** | **0** | **1** | **0.2** | **0** | **2** |
| **13** | **y' = y2 / x** | **1** | **1** | **0.2** | **1** | **2** |
| **14** | **y' = x2 y** | **0** | **1** | **0.2** | **0** | **2** |
| **15** | **y' = y2 (2 – x)** | **0** | **-1** | **0.4** | **0** | **4** |
| **16** | **y' = 3 x2 y2** | **0** | **-4** | **0.2** | **0** | **2** |
| **17** | **y' = y2 (ex + 4x)** | **0** | **-1** | **0.4** | **0** | **4** |
| **18** | **y' = y (x – 1)** | **0** | **1** | **0.4** | **0** | **4** |
| **19** | **y' = x (1 + y2)** | **0** | **0** | **0.2** | **0** | **1.6** |
| **20** | **y' = x / (2y)** | **0** | **1** | **0.4** | **0** | **4** |
| **21** | **y' = y / (3 x2)** | **1** | **1** | **0.2** | **1** | **3** |
| **22** | **y' = 4 x e-3y** | **1** | **0** | **0.2** | **1** | **3** |
| **23** | **y' = 2 x y** | **0** | **1** | **0.2** | **0** | **2** |
| **24** | **y' = 2 x (y1/2)** | **0** | **1** | **0.4** | **0** | **4** |
| **25** | **y' = y2 ex** | **0** | **-2** | **0.4** | **0** | **4** |
| **26** | **y' = x (1 – y2)1/2** | **0** | **0** | **0.4** | **0** | **1.6** |
| **27** | **y' = (1 + x) y** | **0** | **1** | **0.2** | **0** | **2** |
| **28** | **y' = x2 (1 – y2)1/2** | **0** | **0** | **0.4** | **0** | **1.6** |
| **29** | **y' = (x2 + x) y2** | **0** | **-1** | **0.4** | **0** | **4** |
| **30** | **y' = y2 / cos2(x)** | **0** | **-1** | **0.3** | **0** | **1.5** |
| **31** | **y' = y2sin x** | **0** | **1** | **0.1** | **0** | **1** |
| **32** | **y' = cos(x) y** | **0** | **1** | **0.1** | **0** | **1** |
| **33** | **y' =** | **0** | **1** | **0.1** | **0** | **1** |
| **34** | **y' = (x-1)2 y2** | **0** | **1** | **0.1** | **0** | **1** |
| **35** | **y' = y2 cos(x)** | **0** | **-1** | **0.1** | **0** | **1** |
| **36** | **y' = 0.5 y2** | **1** | **1** | **0.1** | **1** | **2** |
| **37** | **y' =  *y2* x** | **0** | **-2** | **0.1** | **0** | **1** |
| **38** | **y' =** | **3** | **3** | **0.1** | **3** | **4** |
| **39** | **y' = y2 ex** | **1** | **-1** | **0.1** | **1** | **2** |
| **40** | **y' = e-y** | **1** | **0** | **0.1** | **1** | **2** |
| **41** | **y' = y (x-1)** | **0** | **1** | **0.1** | **0** | **1** |
| **42** | **y' = 3 y2 x2** | **0** | **-4** | **0.1** | **0** | **1** |
| **43** | **y' = (x+1)ey** | **0** | **1** | **0.1** | **0** | **1** |
| **44** | **y' = y cos(x** | **0** | **1** | **0.1** | **0** | **1** |
| **45** | **y' = 2y** | **0** | **1** | **0.1** | **0** | **1** |
| **46** | **y' =** | **0** | **0** | **0.1** | **0** | **1** |
| **47** | **y' =** | **0** | **1** | **0.1** | **0** | **1** |
| **48** | **y' = y2/x** | **1** | **1** | **0.1** | **1** | **2** |
| **49** | **y' = y /x2** | **1** | **1** | **0.1** | **1** | **2** |
| **50** | **y' = (1-x2) /cos(y)** | **1** | **1** | **0.1** | **1** | **2** |
| **51** | **y' = (1+y) sin(x)** | **0** | **2** | **0.1** | **0** | **1** |
| **52** | **y' = y e-2x** | **0** | **1** | **0.1** | **0** | **1** |
| **53** | **y' = x cos2(y)** | **0** | **1** | **0.1** | **0** | **1** |
| **54** | **y' = cos(y)/ (1+x)** | **0** | **0** | **0.1** | **0** | **1** |
| **55** | **y' = 0.5 (x+2) y2** | **0** | **1** | **0.1** | **0** | **1** |
| **56** | **y' = x cos(y)** | **1** | **2** | **0.1** | **1** | **2** |
| **57** | **y' = x2sin(y)** | **1** |  | **0.1** | **1** | **2** |
| **58** | **y' = y2e-x** | **0** | **1** | **0.1** | **0** | **1** |
| **59** | **y' = y2** | **0** | **1** | **0.1** | **0** | **1** |
| **60** | **y' = e-y/x** | **0** | **1** | **0.1** | **0** | **1** |
| **61** | **y' = 3 (sin x) y** | **0** | **1** | **0.1** | **0** | **1** |
| **62** | **y' = (cos x) /y** | **0** | **1** | **0.1** | **0** | **1** |
| **63** | **y' = x** | **0** | **1** | **0.1** | **0** | **1** |
| **64** | **y' = (x-1)2 y2/2** | **0** | **1** | **0.1** | **0** | **1** |
| **65** | **y' = 1.5 y2 cos(x)** | **1** | **1** | **0.1** | **1** | **2** |
| **66** | **y' = y2/4** | **1** | **1** | **0.1** | **1** | **2** |
| **67** | **y' = 2 y2 x3** | **0** | **-2** | **0.1** | **0** | **1** |
| **68** | **y' = 1.7** | **3** | **3** | **0.1** | **3** | **4** |
| **69** | **y' = y2 ex/2** | **0** | **-1** | **0.1** | **0** | **1** |
| **70** | **y' = ye-y+x** | **1** | **0** | **0.1** | **1** | **2** |
| **71** | **y' = y (x-1)/2** | **0** | **1** | **0.1** | **0** | **1** |
| **72** | **y' = 3 (x+1) y2** | **0** | **-1** | **0.1** | **0** | **1** |
| **73** | **y' = 2 eyx** | **0** | **-1** | **0.1** | **0** | **1** |
| **74** | **y' = 0.5 y cos(x)** | **0** | **1** | **0.1** | **0** | **1** |
| **75** | **y' = y/5** | **0** | **1** | **0.1** | **0** | **1** |
| **76** | **y' = x** | **0** | **1** | **0.1** | **0** | **1** |
| **77** | **y' = 2 y2/x** | **0** | **1** | **0.1** | **0** | **1** |
| **78** | **y' = (4-x2) cos(y)** | **0** | **1** | **0.1** | **0** | **1** |
| **79** | **y' = (2+y) sin(x)** | **0** | **1** | **0.1** | **0** | **1** |
| **80** | **y' = y tg(x)** | **0** | **1** | **0.1** | **0** | **1** |
| **81** | **y' = y ex** | **0** | **1** | **0.1** | **0** | **1** |
| **82** | **y' = 2y** | **0** | **1** | **0.1** | **0** | **1** |
| **83** | **y' = x sin2(y)** | **1** | **1** | **0.1** | **1** | **2** |
| **84** | **y' = 3 x2 y** | **0** | **1** | **0.1** | **0** | **1** |
| **85** | **y’=0.5 ex-y** | **1** | **1** | **0.1** | **1** | **2** |
| **86** | **y' = y** | **1** | **1** | **0.1** | **1** | **2** |
| **87** | **y’=sin(x) e-y** | **1** | **1** | **0.1** | **1** | **2** |
| **88** | **y' = (x/)y2** | **0** | **1** | **0.1** | **0** | **1** |
| **89** | **y' = x2 y3/4** | **0** | **1** | **0.1** | **0** | **1** |
| **90** | **y' =** | **1** | **2** | **0.1** | **1** | **2** |

### **1.5.4. Содержание отчета**

1. Индивидуальное задание.
2. Решение ОДУ аналитическим методом.
3. Значения полученного решения y(x) на отрезке [a;b] с шагом , записанные в табл. 1.5-2.



1. Значения численного решенияОДУ, вычисленные методом Эйлера - в точках отрезка [a;b] с шагом h0**,** используя «ручной расчет», и записанные в табл. 1.5-2.



1. Значения погрешностейдля, , , записанные в табл. 1.5-2.



1. Схема алгоритма, программа решения дифференциального уравненияметодом Рунге-Кутты, результаты контрольного тестирования.
2. Значения решения с шагом h0 и E =10-4 , полученные по программе, записанные в табл. 1.5-2с указанием числа разбиений и фактического шага интегрирования для каждой точки.



1. Значения вычисленных погрешностей, , записанные в табл. 1.5-2.



1. Графическая иллюстрация решений .



Все решения в итоге должны быть оформлены в виде табл. результатов 1.5-2.

Таблица1.5-2

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **xi** |  |  |  |  |  |
| … | … | … | … | … | … |

### **Пример выполнения задания**

1. **Задание для численного решения обыкновенных дифференциальных уравнений:**

* дифференциальное уравнение ;



* интервал [0;1];
* начальные условия x0=0, y0=1;
* шаг интегрирования h0=0.1.

1. **Точное аналитическое решение заданного дифференциального уравнения**

Найдем точное аналитическое решение заданного дифференциального уравнения (решение y=y(x))методом разделения переменных. Для этого запишем уравнение в виде и проинтегрируем с учетом начальных условий. Получим . Из начальных условий следует, что с=0.



Аналитическое решение дифференциального уравнения .



1. **Значения точного решения ОДУ –y(x)**

Вычислим значения полученного решения **y(xi)** на отрезке [0;1] с шагом изменения аргумента h=0.1:

|  |  |
| --- | --- |
| **xi** | **y(xi)** |
| 0 | 1 |
| 0.1 | 1.1051711 |
| 0.2 | 1.2214026 |
| 0.3 | 1.3498585 |
| 0.4 | 1.4918243 |
| 0.5 | 1.6487202 |
| 0.6 | 1.8221179 |
| 0.7 | 2.0137515 |
| 0.8 | 2.2255394 |
| 0.9 | 2.4596014 |
| 1 | 2.7182798 |

1. **Численное решение заданного ДУ методом Эйлера**

Найдем значения численного решение ОДУ методом Эйлера ()в точках отрезка[0;1]с шагом h=0.1. Для этогоДУ записывают в виде y’=f(x,y) . Тогда общая формула для определения очередного значения функции по методу Эйлера имеет вид yi+1=yi+h⋅f(xi,yi), где , :



|  |  |
| --- | --- |
| **xi** |  |
| 0 |  |
| 0.1 | 1.1000 |
| 0.2 | 1.210000 |
| 0.3 | 1.331000 |
| 0.4 | 1.4641001 |
| 0.5 | 1.6105101 |
| 0.6 | 1.7715611 |
| 0.7 | 1.9487172 |
| 0.8 | 2.1435795 |
| 0.9 | 2.3579478 |
| 1 | 2.5937426 |

1. **Значения погрешностей**



Вычислим значения погрешностей для, ,:



|  |  |
| --- | --- |
| **xi** | **Ei** |
| 0 |  |
| 0.1 | 0.005171 |
| 0.2 | 0.011403 |
| 0.3 | 0.018858 |
| 0.4 | 0.027724 |
| 0.5 | 0.038211 |
| 0.6 | 0.050557 |
| 0.7 | 0.065034 |
| 0.8 | 0.081960 |
| 0.9 | 0.101654 |
| 1 | 0.124537 |

1. **Схема алгоритма и программа решения ОДУ методом Рунге-Кутты 4-го порядка с автоматическим выбором шага**

Схема алгоритма интегрирования ОДУ методом Рунге-Кутты 4-го порядка с автоматическим выбором шага приведена на рис.1.5.3-2 и рис. 1.5.3-3 в [2], а программу студенты должны написать самостоятельно.

1. **Решения, полученные по составленной программе «расчетом на ПК»**

Выполним программу и получим решение (то есть получим значения с шагом  
h= 0.1 и Е =10-4 ):



|  |  |
| --- | --- |
| **xi** |  |
| 0 | 1 |
| 0.1 | 1.105171 |
| 0.2 | 1.221403 |
| 0.3 | 1.349859 |
| 0.4 | 1.491825 |
| 0.5 | 1.648721 |
| 0.6 | 1.822119 |
| 0.7 | 2.013753 |
| 0.8 | 2.225541 |
| 0.9 | 2.459603 |
| 1 | 2.718282 |

1. **Значения погрешностей**



Вычислим значения погрешностей ,



|  |  |
| --- | --- |
| **xi** |  |
| 0 | 0 |
| 0.1 | 0.0000001 |
| 0.2 | 0.0000004 |
| 0.3 | 0.0000005 |
| 0.4 | 0.0000007 |
| 0.5 | 0.0000008 |
| 0.6 | 0.0000011 |
| 0.7 | 0.0000015 |
| 0.8 | 0.0000016 |
| 0.9 | 0.0000016 |
| 1 | 0.0000022 |

Все решения, полученные выше, сведем в табл. результатов 1.5-2:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **xi** | **y(xi)** |  | **Ei** |  |  |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 0.1 | 1.1051711 | 1.1000 | 0.005171 | 1.105171 | 0.0000001 |
| 0.2 | 1.2214026 | 1.210000 | 0.011403 | 1.221403 | 0.0000004 |
| 0.3 | 1.3498585 | 1.331000 | 0.018858 | 1.349859 | 0.0000005 |
| 0.4 | 1.4918243 | 1.4641001 | 0.027724 | 1.491825 | 0.0000007 |
| 0.5 | 1.6487202 | 1.6105101 | 0.038211 | 1.648721 | 0.0000008 |
| 0.6 | 1.8221179 | 1.7715611 | 0.050557 | 1.822119 | 0.0000011 |
| 0.7 | 2.0137515 | 1.9487172 | 0.065034 | 2.013753 | 0.0000015 |
| 0.8 | 2.2255394 | 2.1435795 | 0.081960 | 2.225541 | 0.0000016 |
| 0.9 | 2.4596014 | 2.3579478 | 0.101654 | 2.459603 | 0.0000016 |
| 1 | 2.7182798 | 2.5937426 | 0.124537 | 2.718282 | 0.0000022 |

Где , ,



– аналитическое решение ОДУ,



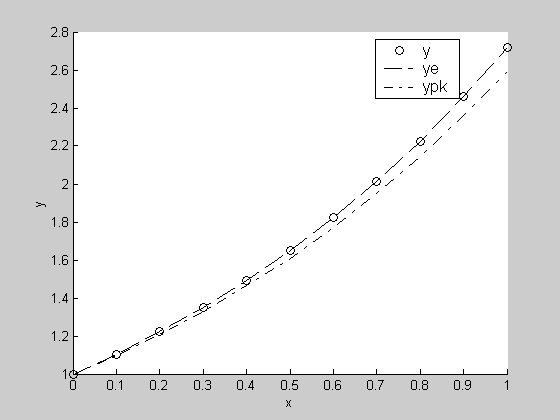
- решение ОДУ, полученное методом Эйлера, ,



- решение ОДУ методом Рунге-Кутты 4-го порядка, .



1. **Графическая иллюстрация решений**



В данном случае решение y(x) совпадает с.



### **1.5.6. Контрольные вопросы по теме Методы решения дифференциальных уравнений**

1. Что такое обыкновенное дифференциальное уравнение?
2. Что такое порядок ОДУ?
3. Что называется аналитическим решением ОДУ 1-го порядка?
4. Что является общим решением ОДУ?



1. Что является геометрической интерпретацией общего решения ОДУ?



1. Что является частным решением ОДУ?



1. Что является численным решением ОДУ?



1. Что относится к начальным условиям при решении ОДУ 1-го порядка численными методами?
2. Имеет ли задача Коши для дифференциального уравнения 1-го порядка единственное решение?
3. По какому правилу проводят оценку погрешности решения методов Рунге-Кутты?
4. Как выглядит формула для определения очередного значения функции по методу Рунге-Кутты 1-го порядка?
5. Уменьшение шага интегрирования при использовании методов Рунге-Кутты приводит к уменьшению или увеличению погрешности?
6. В обыкновенном дифференциальном уравнении присутствуют производные разных порядков от одной переменной или только первая производная от нескольких переменных?
7. Методы Рунге-Кутты являются одношаговыми или двухшаговыми методами?
8. Сколько раз на каждом шаге необходимо вычислять в модифицированном методе Эйлера?



1. Очередная точка решения **ОДУ** методом Рунге-Кутты вычисляется на основании одного или двух предыдущих значений функции?
2. Возможно ли в методах Рунге-Кутты применение переменного шага интегрирования?
3. Процесс решения дифференциального уравнения называется интегрированием или дифференцированием?
4. Каковы формулы оценки погрешности методов Рунге-Кутты?
5. Почему метод Эйлера называют методом Рунге-Кутты первого порядка?
6. Модифицированный метод Эйлера относится к методам Рунге-Кутты решения ОДУ 1-го или 2-го порядка?
7. Что требуется предварительно сделать, чтобы применить методы Рунге-Кутты при решении ОД**У** 2-го порядка?
8. С помощью чего при оценке погрешности метода автоматического выбора шага учитывается порядок используемого метода Рунге-Кутты?
9. С помощью какого параметра происходит достижение заданной точности решения ОДУ в методе автоматического выбора шага?
10. Можно ли оценить погрешность решения ОДУ**,** не зная точного решения?
11. В каком методе решения ОДУподынтегральная функция на отрезке аппроксимируется интерполяционным многочленом 1-го порядка, а затем интегрируется методом прямоугольников?
12. В каком методе решения ОДУ подынтегральная функция на отрезке **[**xi;xi+1]аппроксимируется интерполяционным многочленом 1-го порядка, а затем интегрируется методом трапеции?
13. Что является начальными условиями ОДУn-го порядка (для n=2)?
14. Сколько ОДУ 1-го порядка будет содержать система, построенная для решения n-го

порядка?